Internal approachabilityの諸相とその応用 (集合論的手法による相対的無矛盾性の証明の周辺)

渕野, 昌

数理解析研究所講究録 1304 巻 2003 年 67-77

Internal approachability の諸相とその応用

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)
中部大学 工学部 理学教室 *

Abstract

本稿では *internal approachability* のいくつかの *variations* について考察する. これらを用いて, [8] で定義された *combinatorial principle* SEP の 変種である SEP^-, $\mathrm{SEP}^{\sqsubset}$, $\mathrm{SEP}^{\sqsubset -}$ *etc.* が自然に導入される. これらの概念を応用して, $\square_{\omega_1}$ と SEP から $\mathfrak{a} = \aleph_1$ が導かれることを示す.

0 はじめに

本稿では [3] で得られた結果の一部とそれに関連する結果について解説する. 第1節では *internal approachability* のいくつかの *variations* について考察する. 第2節では, これらを用いて, [8] で定義された *combinatorial principle* SEP の *variations* SEP^-, $\mathrm{SEP}^{\sqsubset}$, $\mathrm{SEP}^{\sqsubset -}$ *etc.* を導入し, これらの関係について考察する. 第3節では, 第1節と第2節の応用として, $\square_{\omega_1}$ と SEP から $\mathfrak{a} = \aleph_1$ が導かれることを示す.

1 Internal apporachability

以下では断わらない限り χ は常に正則基数とする. $\mathcal{H}_\chi$ で *hereditary of cardinality* $< \chi$ な集合の全体をあらわす. $trcl(x)$ で集合 x の *transitive closure* をあらわすことにすると,

$$\mathcal{H}_\chi = \{x : |\,trcl(x)\,| < \chi\}$$

である. 集合 X と基数 κ に対し, $[X]^\kappa = \{x \in \mathcal{P}(X) : |\,x\,| = \kappa\}$ とする. ここで,

$$\mathcal{M}_\chi = \{M \in [\mathcal{H}_\chi]^{\aleph_1} : M \prec \mathcal{H}_\chi\}$$

*Department of Natural Science and Mathematics, Chubu University. Kasugai Aichi 487-8501 JAPAN. e-mail: fuchino@isc.chubu.ac.jp

とする．ただし，$M \prec \mathcal{H}_\chi$ と書いたときには，$\langle M, \in \cap M^2 \rangle \prec \langle \mathcal{H}_\chi, \in \cap (\mathcal{H}_\chi)^2 \rangle$ のこととする．また，

$$\mathcal{M}^*_\chi = \{M \in \mathcal{M}_\chi : [M]^{\aleph_0} \cap M \text{ は } [M]^{\aleph_0} \text{ で } \subseteq \text{ に関し共終}\}$$

$$\mathcal{M}^{\sqsubset}_\chi = \{M \in \mathcal{M}_\chi : M \text{ の順序型 } \omega_1 \text{ の整列順序 } \sqsubset \text{ で すべての } a \in M \text{ に対し}, \sqsubset \cap (M_{\sqsubset a})^2 \in M \text{ となるものがある}\}$$

とする．ただし，

$$M_{\sqsubset a} = \{x \in M : x \sqsubset a\}$$

とする．$M \prec \mathcal{H}_\chi$ が internally approachable とは，$|M|$ 未満の濃度を持つ M の *elementary submodels* の連続な上昇列 $\langle M_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$ で，すべての $\alpha < \lambda$ に対し，$\langle M_\beta : \beta \le \alpha \rangle \in M_{\alpha+1}$ となり，$M = \bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha$ となるようなものが存在することである ([2])．

$$\mathcal{M}^{int}_\chi = \{M \in \mathcal{M}_\chi : M \text{ は } \textit{internally approachable}\}$$

とする．

Lemma 1.1 $\mathcal{M}^{\sqsubset}_\chi \subseteq \mathcal{M}^{int}_\chi \subseteq \mathcal{M}^*_\chi \subseteq \mathcal{M}_\chi$ が成り立つ．

証明． $\mathcal{M}^*_\chi \subseteq \mathcal{M}_\chi$ は定義から明らかである．

$\mathcal{M}^{\sqsubset}_\chi \subseteq \mathcal{M}^{int}_\chi$ を示す．$M \in \mathcal{M}^{\sqsubset}_\chi$ として，$\sqsubset$ を $\mathcal{M}^{\sqsubset}_\chi$ の定義でのようなものとする．このとき，$\sqsubset$ に関する連続な上昇列 $x_\alpha \in M$, $\alpha < \omega_1$ を，次の (1) ~ (3) を満たすように帰納的にとる:

(1) すべての $\alpha < \omega_1$ に対し，$M_{\sqsubset x_\alpha} \prec M$;

(2) すべての $\alpha < \omega_1$ に対し，$\alpha = \alpha' + 1$ なら，$\langle x_\beta : \beta \le \alpha' \rangle \in M_{x_\alpha}$;

(3) すべての $\alpha < \omega_1$ に対し，x_α は (1) と (2) を満たすもののうち $\sqsubset$ に関し最小のもの（ただし α が極限順序数のときには，x_α は連続性から一意に決まる）．

$\langle x_\beta : \beta < \alpha \rangle$ が定義できたとき，$x \in M$ で，すべての $\beta < \alpha$ に対し $x_\beta \sqsubset x$ となり，$M_{\sqsubset x} \prec M$ となるようなものがとれるが，

(1') すべての $\beta < \alpha$ に対し，$M_{\sqsubset x_\beta} \prec M_{\sqsubset x}$;

(2') すべての $\beta < \alpha$ に対し，$\beta = \beta' + 1$ なら，$\langle x_\gamma : \gamma \le \beta' \rangle \in M_\beta$;

(3') すべての $\beta < \alpha$ に対し，x_β は (1') と (2') を満たすもののうち $\sqsubset$ に関し最小のもの

は，M で α と x と $\sqsubset \cap (M_{\sqsubset x})^2$ をパラメタとする論理式で表現できるから，M の *elementarity* から $\langle x_\beta : \beta < \alpha \rangle \in M$ となることがわかる．したがって，(1) $\sim$ (3) を満たすような x_α を選ぶことができる．$\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ は $\sqsubset$ に関し順序型 ω_1 を持つから，M の $\sqsubset$ に関する共終な部分集合となる．したがって，$M = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_{\sqsubset x_\alpha}$ である．また $\langle x_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ は $\sqsubset$ に関する連続な上昇列だから $\langle M_{\sqsubset x_\alpha} : \alpha < \omega_1 \rangle$ も連続な上昇列となる．したがって，(2) により，$\langle M_{\sqsubset x_\alpha} : \alpha < \omega_1 \rangle$ は *internal approachability* の定義でのような上昇列になっていることがわかる．したがって $M \in \mathcal{M}^{int}_\chi$ である．

最後に $\mathcal{M}^{int}_\chi \subseteq \mathcal{M}^*_\chi$ を示す．$M \in \mathcal{M}^{int}_\chi$ なら，M は可算な *elementary submodels* の上昇列 $\langle M_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ の和としてあらわすことができ，各 M_α は M の元である．したがって，すべての $x \in [M]^{\aleph_0}$ に対し，$y \subseteq M_\alpha \in M$ となるような $\alpha < \omega_1$ がとれるから，$[M]^{\aleph_0} \cap M$ は $[M]^{\aleph_0}$ で共終であることがわかる．よって，$M \in \mathcal{M}^*_\chi$ である．

□ (Lemma 1.1)

上の補題での包含関係のうち，$\mathcal{M}^{\sqsubset}_\chi \subseteq \mathcal{M}^{int}_\chi$ の逆は以下の意味でほとんど成り立つ：

Lemma 1.2 $M \in \mathcal{M}^{int}_\chi$ とする．$\mathcal{H}_\chi$ の整列順序 $<^*$ で $M \prec \langle \mathcal{H}_\chi, \in, <^* \rangle$ となるものがあるとき，$M \in \mathcal{M}^{\sqsubset}_\chi$ である．

証明． $\langle M_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ を *internal approachability* の定義でのようにとる．つまり，$\langle M_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ は M の可算な *elementary submodels* の連続な上昇列で，$M = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha$ かつ $\langle M_\beta : \beta \le \alpha \rangle \in M_{\alpha+1}$ がすべての α に対し成り立つとする．$x \in M$ に対し，

$$o(x) = \min\{\alpha < \omega_1 : x \in M_{\alpha+1}\}$$

とする．このとき，M 上の線型順序 $\sqsubset$ を，$x, y \in M$ に対し，

$$x \sqsubset y \ \Leftrightarrow\ o(x) < o(y) \ \vee\ (o(x) = o(y) \ \wedge\ x <^* y)$$

と定義する．このとき，$\sqsubset$ が M の整列順序となることは容易に示せるが，$\sqsubset$ の始片はすべて可算で，M 自身は不可算だから，$\sqsubset$ の順序型は ω_1 であることがわかる．$x \in M$ に対し，$\alpha = o(x)$ とすると，$\langle M_\beta : \beta \le \alpha + 1 \rangle \in M$ したがって，特に $M_{\alpha+1} \in M$ で，*elementarity* から $<^* \cap (M_{\alpha+1})^2 \in M$ となるから，$\sqsubset \cap (M_{\alpha+1})^2$ は M の元をパラメタとする論理式で定義できる．したがって，$\sqsubset \cap (M_{\alpha+1})^2 \in M$ である．このことから $M_{\sqsubset x}$，したがって $\sqsubset \cap (M_{\sqsubset x})^2$ も M の元となることがわかる．よって，$M \in \mathcal{M}^{\sqsubset}_\chi$ である．

□ (Lemma 1.2)

$\mathcal{C} \subseteq [\mathcal{H}_\chi]^{\aleph_1}$ が closed unbounded とは，すべての $x \in [\mathcal{H}_\chi]^{\aleph_1}$ に対し $y \in \mathcal{C}$ で $x \subseteq y$ となるものがあり（つまり $\subseteq$ に関して $[\mathcal{H}_\chi]^{\aleph_1}$ で共終），長さ $< \omega_2$ の $\subseteq$ に関する $\mathcal{C}$ の

元の上昇列 $\langle x_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ に対し $\bigcup_{\alpha<\gamma} x_\alpha \in \mathcal{C}$ が常に成り立つことである．$\mathcal{S} \subseteq [\mathcal{H}_\chi]^{\aleph_1}$ が stationary であるとは，すべての *closed unbounded* な $\mathcal{C} \subseteq [\mathcal{H}_\chi]^{\aleph_1}$ に対し，$\mathcal{S} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ が成り立つことである．

Lemma 1.3 (1) $\mathcal{M}_\chi$ は $[\mathcal{H}_\chi]^{\aleph_1}$ の *closed unbounded subset* である．

(2) $\mathcal{M}^*_\chi$ は $\subseteq$ に関して $[\mathcal{H}_\chi]^{\aleph_1}$ で共終で，長さ ω_1 の $\subseteq$ に関する上昇列の和集合に関し閉じている．

(3) $\mathcal{M}^{\sqsubseteq}_\chi$ は $[\mathcal{H}_\chi]^{\aleph_1}$ で *stationary.*

証明. (1) はモデル理論での *Löwenheim-Skolem* の定理と連鎖の定理から明らか．

(2): $\langle M_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ を $\subseteq$ に関する $\mathcal{M}^*_\chi$ の元の上昇列とする．このとき，$M = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha$ とすると，$M \prec \mathcal{H}_\chi$ である．任意の $x \in [M]^{\aleph_1}$ に対し，$x \subseteq M_\alpha$ となる α がとれるが，$M_\alpha \in \mathcal{M}^*_\chi$ だから，$y \in [M_\alpha]^{\aleph_1} \cap M_\alpha \subseteq [M]^{\aleph_1} \cap M$ で，$x \subseteq y$ となるものが存在する．したがって $M \in \mathcal{M}^*_\chi$ である．

(3): $\mathcal{C} \subseteq [\mathcal{H}_\chi]^{\aleph_1}$ を *closed unbounded* として，$\mathcal{C} \cap \mathcal{M}^{\sqsubseteq}_\chi \neq \emptyset$ を示す．$<^*$ を $\mathcal{H}_\chi$ の任意の整列順序として，$\langle \mathcal{H}_\chi, \in, <^* \rangle$ の可算な *elementary submodels* の上昇列 $\langle M_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ を

(a) $\mathcal{C} \in M_0$;

(b) すべての $\alpha < \omega_1$ に対し $\langle M_\beta : \beta \leq \alpha \rangle \in M_{\alpha+1}$

となるように帰納的に構成できる．$M = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha$ とすれば，Lemma 1.2 と同様に $M \in \mathcal{M}^{\sqsubseteq}_\chi$ が示せる．$\mathcal{C} \in M_0 \subseteq M$ により，M の *elementarity* から，$\mathcal{C} \cap M$ は M で *unbounded* で *directed* である．各 $x \in \mathcal{C} \cap M$ に対し，$\omega_1 \subseteq M$ だから，$x \subseteq M$．したがって，$M = \bigcup(\mathcal{C} \cap M) \in \mathcal{C}$ となる． □ (Lemma 1.3)

次の結果も $\mathcal{M}^{\sqsubseteq}_\chi$ と $\mathcal{M}^{int}_\chi$ がほとんど同一のクラスとなっていることを示唆している：

Lemma 1.4 $\chi < \lambda$ を正則基数で，$|\mathcal{H}_\chi| < \lambda$ となっているものとする．このとき，$M \in \mathcal{M}^{int}_\lambda$ で $\chi \in M$ なら，$M \cap \mathcal{H}_\chi \in \mathcal{M}^{\sqsubseteq}_\chi$ である．

証明. *Elementarity* により，$\mathcal{H}_\chi \in M$ となるり，$\mathcal{H}_\chi$ の整列順序 $<^*$ で $<^* \in M$ となるものがある．このとき，$M \cap \mathcal{H}_\chi \prec \langle \mathcal{H}_\chi, \in, <^* \rangle$ となる．$\langle M_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ を $M \in \mathcal{M}^{int}_\lambda$ の定義でのようにとる．$\chi \in M_0$ としてよい．各 $\alpha < \omega_1$ に対し，$M'_\alpha = M_\alpha \cap \mathcal{H}_\chi$ とすると，$\langle M'_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ により $M \cap \mathcal{H}_\chi \in \mathcal{M}^{int}_\chi$ がわかる．したがって，Lemma 1.2 により，$M \cap \mathcal{H}_\chi \in \mathcal{M}^{\sqsubseteq}_\chi$ である． □ (Lemma 1.4)

連続体仮説 (CH) が成り立つときには，すべての正則基数 χ に対し，$\mathcal{M}^*_\chi$, $\mathcal{M}^{int}_\chi$, $\mathcal{M}^{\sqsubseteq}_\chi$ はすべて一致する：

Lemma 1.5 連続体仮説 (CH) を仮定する．このとき，$M \in \mathcal{M}^*_\chi$ なら，$[M]^{\aleph_0} \subseteq M$ となる．

証明．$x \in [M]^{\aleph_0}$ とすると，$M \in \mathcal{M}^*_\chi$ により，$y \in [M]^{\aleph_0} \cap M$ で $x \subseteq y$ となるものがとれる．連続体仮説により，上射 $f : \omega_1 \to \mathcal{P}(y)$ が存在するが，*elementarity* から，そのような f で M の元になっているようなものが存在する．$\alpha < \omega_1$ を $f(\alpha) = x$ となるものとすと，$\omega_1 \subseteq M$ だから $\alpha \in M$ となり，$x = f(\alpha) \in M$ がわかる．❑ (Lemma 1.5)

Proposition 1.6 連続体仮説 (CH) を仮定するとき，すべての正則基数 χ に対し，$\mathcal{M}^*_\chi = \mathcal{M}^{\sqsubseteq}_\chi$ が成り立つ．

証明．Lemma 1.1 により $\mathcal{M}^{\sqsubseteq}_\chi \subseteq \mathcal{M}^*_\chi$ である．$\mathcal{M}^*_\chi \subseteq \mathcal{M}^{\sqsubseteq}_\chi$ を示す．$M \in \mathcal{M}^*_\chi$ とすると，Lemma 1.5 により，$[M]^{\aleph_0} \subseteq M$ である．$\sqsubset$ を任意の M の順序型 ω_1 を持つ整列順序とすると，すべての $x \in M$ に対し，$M_{\sqsubset x}$ と $\sqsubset \cap (M_{\sqsubset x})^2$ は M の可算部分集合だから M の元である．したがって $M \in \mathcal{M}^{\sqsubseteq}_\xi$ がわかる．❑ (Proposition 1.6)

2 SEP

$P = \langle P, \leq \rangle$ を半順序集合とするとき，$Q \subseteq P$ と $p \in P$ に対し，$Q \uparrow p = \{q \in Q : p \leq q\}$, $Q \restriction p = \{q \in Q : q \leq p\}$ とする．$Y \subseteq X \subseteq P$ として，Y が X で**共終**とは，すべての $x \in X$ に対し $y \in Y$ で $x \leq y$ となるようなものが存在することとする．Y が X で**共始**とは，すべての $x \in X$ に対し $y \in Y$ で $y \leq x$ となるようなものが存在することとする．$Q \subseteq P$ が P の σ-subordering である（これを $Q \leq_\sigma P$ であらわす）とは，すべての $p \in P$ に対し，$Q \uparrow p$ が共始な可算集合を持ち，$Q \restriction p$ が共終な可算集合を持つこととする．

P が性質 SEP を持つ（これを SEP(P) であらわす）とは，すべての十分に大きな χ に対し，$\{M \in \mathcal{M}^*_\chi : P \cap M \leq_\sigma P\}$ が $\subseteq$ に関して $[\mathcal{H}_\chi]^{\aleph_1}$ で共終になることである．$\mathcal{P}(\omega)$ を $\subseteq$ に関する半順序集合とみて SEP で SEP($\mathcal{P}(\omega)$) をあらわすことにする．SEP は *I. Juhász* と *K. Kunen* [8] により，ここでの定義とは異なる記述により導入された．*S. Geschke* と筆者は，[3] で *I. Juhász* と *K. Kunen* による SEP がここで定義として与えた形で特徴付けられることを示した．

SEP(P) のここでの定義から，SEP が [4], [5], [6], [7] で研究された *weak Freese-Nation property* (WFN) や [1] で導入された $(\aleph_1, \aleph_0)$-*ideal property* (IDP) の一般化になっていることがわかる．ここで，半順序集合 P が weak Freese-Nation property を持つ (WFN(P)) とは，すべての十分に大きな χ に対し，$M \in \mathcal{M}_\chi$ で $P \in M$ なら $P \cap M \leq_\sigma P$ が常に成り立つことである．また，P が $(\aleph_1, \aleph_0)$-ideal property を持つ

(IDP(P)) とは，すべての十分に大きな χ に対し，$M \in \mathcal{M}^*_\chi$ で $P \in M$ なら $P \cap M \leq_\sigma P$ が常に成り立つことである．明らかに，WFN(P) $\Rightarrow$ $IDP(P)$ $\Rightarrow$ SEP(P) がすべての半順序集合 P に対し成り立つ．ここでのそれぞれの $\Rightarrow$ の逆向きは成り立たないことが知られている．ただし，WFN(P) $\Rightarrow$ $IDP(P)$ の不成立のためには巨大基数の *consistency strength* が必要である（[7], [5] を参照）．

SEP の定義での「共終」を *"stationary"* に変更することで新しい概念が導入できそうに見えるが，実は，SEP にこの変更を加えたものは元の SEP と一致する．

Theorem 2.1 ([3]) SEP(P) は次のどの命題とも同値である:

(a) ある十分に大きな χ に対し，$\{M \in \mathcal{M}^*_\chi : P \cap M \leq_\sigma P\}$ は $\subseteq$ に関して $[\mathcal{H}_\chi]^{\aleph_1}$ で共終になる．

(b) ある十分に大きな χ に対し，$\{M \in \mathcal{M}^*_\chi : P \cap M \leq_\sigma P\}$ は $[\mathcal{H}_\chi]^{\aleph_1}$ で *stationary* である．

(c) すべての十分に大きな χ に対し，$\{M \in \mathcal{M}^*_\chi : P \cap M \leq_\sigma P\}$ は $[\mathcal{H}_\chi]^{\aleph_1}$ で *stationary* である． □

SEP(P) を満たす半順序集合のクラスは *σ-subordering* に関して閉じている．

Lemma 2.2 P を半順序集合として $P' \leq_\sigma P$ とする．このとき SEP(P) なら，$SEP(P')$ である．

証明. 十分に大きな χ を一つ固定する．このとき，$P, P' \in M$ で，$P \cap M \leq_\sigma P$ となる任意の $M \prec \mathcal{H}_\chi$ に対し，$P' \cap M \leq_\sigma P'$ が成り立つことが示せれば十分である．このために，任意の $x_0 \in P'$ に対し $P' \cap M \restriction x_0$ が可算な共終部分集合を持つことを示す（$P' \cap M \uparrow x_0$ が可算な共始集合を持つことの証明も同様にできる）．$P \cap M \leq_\sigma P$ だから，可算な $X' \subseteq (P \cap M) \restriction x_0$ で，$(P \cap M) \restriction x_0$ で共終になるようなものがとれる．$M \models P' \leq_\sigma P$ だから，*elementarity* により，各 $x \in X$ に対し，$X_x \in M$ を $M \models$「X_x は $P' \restriction x$ で共終な可算集合」 となるようにとれる．このとき $X_x \subseteq M$ で，M の外で見ると X_x は $(P' \cap M) \restriction x$ で共終な可算集合となっている．$Y = \bigcup_{x \in X} X_x$ とすると，$Y \subseteq (P' \cap M) \restriction x_0$ だが，Y は $(P' \cap M) \restriction x_0$ で共終である : $y \in (P' \cap M) \restriction x_0$ とすると，特に $y \in (P \cap M) \restriction x_0$ だから，ある $x \in X$ で $y \leq x$ となるものがあるが，$M \models y \in P' \restriction x$ だから，ある $x' \in X_x \subseteq Y$ で $y \leq x'$ となるものがとれるからである．

□ (Lemma 2.2)

SEP の次の変形は，SEP の真の一般化になっている： 半順序集合 P に対し，

$$\mathrm{SEP}^-(P) \quad \Leftrightarrow \quad \text{ある十分に大きな } \chi \text{ に対し，} \{M \in \mathcal{M}^*_\chi : P \cap M \leq_\sigma P\} \neq \emptyset$$

とする． SEP と SEP^- の定義で $\mathcal{M}_\chi^*$ を $\mathcal{M}^\sqsubset$ で置き換えることによって，さらに新しい半順序集合の性質が導入できる： 半順序集合 P に対し，

$$\begin{aligned}\text{SEP}^\sqsubset(P) \;&\Leftrightarrow\; \text{すべての十分に大きな } \chi \text{ に対し，}\\ &\quad\{M \in \mathcal{M}_\chi^\sqsubseteq : P \cap M \leq_\sigma P\} \text{ は } [\mathcal{H}_\chi]^{\aleph_1} \text{ で共終}\\ \text{SEP}^{\sqsubset-}(P) \;&\Leftrightarrow\; \text{ある十分に大きな } \chi \text{ に対し，} \{M \in \mathcal{M}_\chi^\sqsubseteq : P \cap M \leq_\sigma P\} \neq \emptyset\end{aligned}$$

上で $\mathcal{M}_\chi^\sqsubseteq$ は $\mathcal{M}_\chi^{int}$ で置き換えてもよい：

Lemma 2.3 任意の半順序集合 P に対し，$\text{SEP}^\sqsubset(P)$ は以下の各命題と同値である：

(a) すべての十分に大きな χ に対し，$\{M \in \mathcal{M}_\chi^{int} : P \cap M \leq_\sigma P\}$ は $[\mathcal{H}_\chi]^{\aleph_1}$ で共終．

(b) すべての十分に大きな χ に対し，$\{M \in \mathcal{M}_\chi^{int} : P \cap M \leq_\sigma P\}$ は $[\mathcal{H}_\chi]^{\aleph_1}$ で *stationary.*

(c) すべての十分に大きな χ に対し，$\{M \in \mathcal{M}_\chi^\sqsubseteq : P \cap M \leq_\sigma P\}$ は $[\mathcal{H}_\chi]^{\aleph_1}$ で *stationary.*

証明． Lemma 1.1 により，(c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a) は明らかだから，$\text{SEP}^\sqsubset(P) \Rightarrow$ (c) と (a) $\Rightarrow \text{SEP}^\sqsubset(P)$ を示せばよい．

$\text{SEP}^\sqsubset(P) \Rightarrow$ (c)： $\text{SEP}^\sqsubset(P)$ を仮定して，χ を十分に大きくとる．$\mathcal{C} \subseteq [\mathcal{H}]^{\aleph_1}$ を *closed unbounded* とするとき，$M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{M}_\chi^\sqsubseteq$ で $P \cap M \leq_\sigma P$ となるものが存在することが示せればよい．正則基数 λ を $|\mathcal{H}_\chi| < \lambda$ となるようにとると，仮定から，$\tilde{M} \in \mathcal{M}_\lambda^\sqsubseteq$ で，$P, \mathcal{C} \in \tilde{M}$ かつ $P \cap \tilde{M} \leq_\sigma P$ となるものがとれる．このとき $M = \tilde{M} \cap \mathcal{H}_\chi$ とすると，Lemma 1.4 により $M \in \mathcal{H}_\chi^\sqsubseteq$ である．また，Lemma 1.3,(3) の証明と同様にして $M \in \mathcal{C}$ となることが示せる．したがって，$P \cap M = P \cap \tilde{M} \leq_\sigma P$ により，この M が求めていたようなものである．

(a) $\Rightarrow \text{SEP}^\sqsubset(P)$: Lemma 1.4 により，上と同様な議論で示せる． ❑ (Lemma 2.3)

連続体仮説が成り立つときには，Proposition 1.6 により，すべての半順序集合 P に対し， $\text{SEP}(P)$ と $\text{SEP}^\sqsubset(P)$ は同値になる．一方，連続体仮説が成り立たない場合にも $\text{SEP}(P)$ と $\text{SEP}^\sqsubset(P)$ は同値でありえる．以下で， $\Box_{\omega_1}$ が成り立つとき，$\text{SEP}(P)$ と $\text{SEP}^\sqsubset(P)$ が同値となることを示す．まずその証明で必要となる次の補題を示す：

Lemma 2.4 (1) χ を十分に大きな正則基数として，$X \in \mathcal{H}_\chi$ を非可算集合で $|X|^{\aleph_1} < \chi$ となるものとする．$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}_\chi$ が $[\mathcal{H}_\chi]^{\aleph_1}$ で共終なら，

$$\mathcal{S}' = \{X \cap M : M \in \mathcal{S}\}$$

は $[X]^{\aleph_1}$ で *stationary* になる.

(2) P を濃度 $\aleph_2$ の半順序集合として, $P = \bigcup_{\alpha<\omega_2} P_\alpha$ を P の *filteration* とする（つまり各 P_α は濃度 $\leq \aleph_1$ で $\langle P_\alpha : \alpha < \omega_2\rangle$ は連続な上昇列とする）. このとき, $\alpha \in E^{\omega_2}_{\omega_1}$ で $P_\alpha \leq_\sigma P$ となるものが存在する（ただし, $E^{\omega_2}_{\omega_1} = \{\alpha < \omega_1 : cf(\alpha) = \omega_1\}$ とする）.

証明. (1): $\mathcal{C} \subseteq [X]^{\aleph_1}$ を *closed unbounded* として, $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}' \neq \emptyset$ を示す.

仮定により, $[X]^{\aleph_1}$, $\mathcal{C} \in \mathcal{H}_\chi$ だから, $M \in \mathcal{S}$ で $\mathcal{C} \in M$ となるものがとれる. *Elementarity* により, $\mathcal{C} \cap M$ は $[X \cap M]^{\aleph_1}$ で *unbounded* で *directed* だから, $\mathcal{C}$ が *closed* であることから $X \cap M = \bigcup(\mathcal{C} \cap M) \in \mathcal{C}$ となる. $X \cap M \in \mathcal{S}'$ だから, $\mathcal{S}' \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ である.

(2): χ を十分に大きくとり, $M \in \mathcal{M}^*_\chi$ を $\langle P_\alpha : \alpha < \omega_2\rangle \in M$ かつ $P \cap M \leq_\sigma P$ となるようにとる. このとき, $\alpha^* = \omega_2 \cap M$ とすると, $P \cap M = P_{\alpha^*}$ だから, $P_{\alpha^*} \leq_\sigma P$ である. また $M \in \mathcal{M}^*_\chi$ により, M の順序数の可算集合はすべて *bounded* となるから, $cf(\alpha^*) = \omega_1$ である. ❑ (Lemma 2.4)

Theorem 2.5 $\square_{\omega_1}$ を仮定する. このとき任意の半順序集合 P に対し, $\mathrm{SEP}(P)$ と $\mathrm{SEP}^{\sqsubseteq}(P)$ は同値である.

証明. $\mathrm{SEP}^{\sqsubseteq}(P) \Rightarrow \mathrm{SEP}(P)$ は明らかだから, $\mathrm{SEP}(P) \Rightarrow \mathrm{SEP}^{\sqsubseteq}(P)$ を示せばよい. $\mathrm{SEP}(P)$ とする. $|P| < \aleph_2$ なら $\mathrm{SEP}^{\sqsubseteq}(P)$ だから, $|P| \geq \aleph_2$ と仮定してよい.

χ を十分大きくとり, X を $[\mathcal{H}_\chi]^{\aleph_1}$ の任意の元とする. $M \in \mathcal{H}^{\sqsubseteq}_\chi$ で $X \subseteq M$ かつ $P \cap M \leq_\sigma P$ となるようなものの存在が示せれば十分である.

$\mathcal{H}_\chi$ の整列順序 $<^*$ で順序型 $|\mathcal{H}_\chi|$ を持つものを固定する. $\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha \in Lim(\omega_2)\}$ を $\square_{\omega_1}$-*sequence* とする.

以下の条件を満たすような列 $\langle M_\alpha : \alpha < \omega_2\rangle$ と $\langle a_{\alpha,\gamma} : \alpha < \omega_2, \gamma < \omega_1\rangle$ を帰納的にとる.

(0) $\langle M_\alpha : \alpha < \omega_2\rangle$ は $\langle \mathcal{H}_\chi, \in, <^*\rangle$ の濃度 $\aleph_1$ を持つ *elementary submodels* の連続な上昇列である.

(1) ω_1, $X \subseteq M_0$, P, $\mathcal{C} \in M_0$.

(2) すべての $\alpha < \omega_2$ に対し, $\langle a_{\alpha,\gamma} : \gamma < \omega_1\rangle$ は M_α の枚挙である.

(3) すべての $\beta < \omega_2$ に対し, $\langle M_\alpha : \alpha \leq \beta\rangle$, $<^* \cap (\bigcup_{\alpha\leq\beta} M_\alpha)^2$, $\langle a_{\alpha,\gamma} : \alpha \leq \beta, \gamma < \omega_1\rangle \in M_{\beta+1}$

(4) すべての $\beta < \omega_2$ に対し, $P \cap M_{\beta+1} \leq_\sigma P$.

$M = \bigcup_{\alpha<\omega_2} M_\alpha$ として $Q = P \cap M$ とすると，(4) により，$Q \leq_\sigma P$ となるから，Lemma 2.2 により，SEP(Q) となる．したがって，Lemma 2.4,(2) により，$\alpha^* \in E^{\omega_2}_{\omega_1}$ で，$Q \cap M_{\alpha^*} \leq_\sigma Q$. となるものがある．$P \cap M_{\alpha^*} = Q \cap M_{\alpha^*}$ だから，$P \cap M_{\alpha^*} \leq_\sigma P$ である．また，(1) により $X \subseteq M_{\alpha^*}$ だから，次の *Claim* により証明が完了する:

Claim **2.5.1** $M_{\alpha^*} \in \mathcal{M}^{\sqsubseteq}_{\chi}$.

$\vdash$ $C = C_{\alpha^*}$ とすると，C は 順序型 ω_1 を持ち α^* で共終である．ξ_α, $\alpha < \omega_1$ を C の真に昇順の枚挙とする．各 *limit* $\alpha < \omega_1$ に対し，$\beta < \alpha^*$ で，$\xi_\alpha \in M_\beta$ となるものがある．$\square_{\omega_1}$*-sequence* $\mathcal{C}$ の *coherence* により，$C_{\xi_\alpha} = \{\xi_\gamma : \gamma < \alpha\}$ となるから，$C_{\xi_\alpha} \in M_\beta$ により，$\{\xi_\gamma : \gamma < \alpha\} \in M_\beta \subseteq M_{\alpha^*}$ となる．したがって

(∗) すべての $\alpha < \omega_1$ に対し，$\{\xi_\gamma : \gamma < \alpha\} \in M_{\alpha^*}$ である．

$\varphi : \omega_1 \to \omega_1 \times \omega_1;\ \alpha \mapsto \langle \varphi_0(\alpha), \varphi_1(\alpha)\rangle$ を上射で $\varphi \in M_0$ となるものとする．

ここで，帰納的に M_{α^*} の可算な *elementary submodels* の列 $\langle N_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle$ を帰納的に次を満たすように構成する：

(5) すべての $\alpha < \omega_1$ に対し，$a_{\xi_{\varphi_0(\alpha)},\varphi_1(\alpha)}$, $\langle N_\beta : \beta \leq \alpha\rangle \in N_{\alpha+1}$;

(6) $N_{\alpha+1}$ は M_{α^*} の可算な *elementary submodel* で $N_{\alpha+1} \in M_{\alpha^*}$ となり，(5) を満たすようなもののうち $<^*$ に関して最小である．

この構成が可能なことは次のようにして見ることができる：(∗) と "$N_\alpha \prec M_{\alpha^*}$" を十分に大きな $\eta < \alpha^*$ に対する "$N_\alpha \prec M_\eta$" で置き換えて考えることにより，$\langle N_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle$ の各始片は M_{α^*} で定義可能となり，したがって，M_{α^*} の元となる．

(5) により，$\bigcup_{\alpha<\omega_1} N_\alpha = M_{\alpha^*}$ で，すべての $\alpha < \omega_1$ に対し，$\langle N_\beta : \beta \leq \alpha\rangle \in N_{\alpha+1}$ となる．したがって，Lemma 1.2 により，$M_{\alpha^*} \in \mathcal{M}^{\sqsubseteq}_{\chi}$ となる． $\dashv$ (*Claim* 2.5.1)

□ (Theorem 2.5)

3 Almost disjoint number

$x, y \in [\omega]^{\aleph_0}$ が almost disjoint とは，$x \cap y$ が有限になることとする．$X \subseteq [\omega]^{\aleph_0}$ が almost disjoint とは，すべての異なる $x, y \in X$ が *almost disjoint* となることである．$X \subseteq [\omega]^{\aleph_0}$ が maximal almost disjoint とは X は *almost disjoint* で，$X \subsetneq Y \subseteq [\omega]^{\aleph_0}$ となる *almost disjoint* な Y が存在しないことである．X が *maximal almost disjoint* のとき，X は MAD-family である，とも言う．

Almost disjoint number $\mathfrak{a}$ は

$$\mathfrak{a} = \min\{|X| : X \text{ は } \textit{maximal almost disjoint}\}$$

と定義される．$\aleph_1 \le \mathfrak{a} \le 2^{\aleph_0}$ である．

WFN($\mathcal{P}(\omega)$) のもとで $\mathfrak{a} = \aleph_1$ が成り立つが ([4])，同様の証明は SEP($\mathcal{P}(\omega)$) のもとでは行なえない．しかし次が成り立つ：

Theorem 3.1 $\mathrm{SEP}^{\sqsubset -}(\mathcal{P}(\omega))$ が成り立つなら $\mathfrak{a} = \aleph_1$ である．

証明． χ を十分に大きくとり $M^* \in \mathcal{M}^{\sqsubset}_{\chi}$ を $\mathcal{P}(\omega) \cap M^* \le_\sigma \mathcal{P}(\omega)$ となるようにとる．$|M^*| = \aleph_1$ だから，*MAD-family* $\subseteq M^*$ が存在することが示せれば十分である．

$\sqsubset$ を $\mathcal{M}^{\sqsubset}_{\chi}$ の定義でのような M^* の整列順序とする．

Lemma 1.1 により，可算な M^* の *elementary submodels* の連続な上昇列 $\langle M_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle$ で $\bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha = M$ かつ，すべての $\alpha < \omega_1$ に対し，$\langle M_\beta : \beta \le \alpha\rangle \in M_{\alpha+1}$ となるようなものがとれる．

ω の無限部分集合の列 $\langle a_\alpha : \alpha < \omega_1\rangle$ を次を満たすようにとる：

(1) $\{a_n : n \in \omega\}$ は ω の分割で $\{a_n : n \in \omega\} \in M_0$;

(2) $\alpha \ge \omega$ に対し，$a_\alpha \in [\omega]^{\aleph_0} \cap M_{\alpha+1}$ で，a_α は次のような性質を満たすもののうち（$\sqsubset$ に関して）最小なものである：

(α) a_α はすべての a_β, $\beta < \alpha$ と *almost disjoint;*

(β) $\forall x \in [\omega]^{\aleph_0} \cap M_\alpha \left(\forall u \in [\alpha]^{<\aleph_0} \left(|x \setminus \bigcup_{\beta\in u} a_\beta| = \aleph_0\right) \rightarrow |a_\alpha \cap x| = \aleph_0\right)$.

(1) と (2) により，$\langle a_\beta : \beta < \alpha\rangle$ は $M_{\alpha+1}$ で，パラメタ $\sqsubset \cap (M_\alpha)^2$, $\langle M_\beta : \beta \le \alpha\rangle \in M_{\alpha+1}$ を用いて定義可能である．したがって，$\langle a_\beta : \beta < \alpha\rangle \in M_{\alpha+1}$ となる．よって (α) と (β) を満たすような a_α を $M_{\alpha+1}$ でとることができる．

(1) と (2)(α) により，$\{a_\beta : \beta < \omega_1\}$ は *almost disjoint* である．これが *maximal almost disjoint* であることを示すために，今，仮にそうでなかったとしてみる．すると，$b \in [\omega]^{\aleph_0}$ で b は すべての a_α と *almost disjoint* となるようなものがとれる．$\{b_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{P}(\omega) \cap M^*$ を $(\mathcal{P}(\omega) \cap M^*) \uparrow b$ の可算な共始部分集合とする．$\alpha^* < \omega_1$ を $\{b_n : n \in \omega\} \subseteq M_{\alpha^*}$ となるようにとる．a_{α^*} と b は *almost disjoint* だから，$\omega \setminus a_{\alpha^*} \in (\mathcal{P}(\omega) \cap M^*) \uparrow b$ となる．したがって，$n^* \in \omega$ で $|b_{n^*} \cap a_{\alpha^*}| < \aleph_0$ となるものがとれる．(2)(β) により，$u \in [\alpha]^{<\aleph_0}$ で $|b_{n^*} \setminus \bigcup_{\beta\in u} a_\beta| < \aleph_0$ となるものがある．$b \subseteq b_{n^*}$ だから，$|b \setminus \bigcup_{\beta\in u} a_\beta| < \aleph_0$ である．しかし，これは b の選び方に矛盾である．

□ (Theorem 3.1)

Corollary 3.2 $\square_{\aleph_1}$ を仮定する．このとき，SEP($\mathcal{P}(\omega)$) なら $\mathfrak{a} = \aleph_1$ が成り立つ．

証明． $\square_{\aleph_1}$ を仮定すると，Theorem 2.5 により，SEP($\mathcal{P}(\omega)$) なら SEP$^{\sqsubset}$($\mathcal{P}(\omega)$) である．したがって，特に SEP$^{\sqsubset-}$($\mathcal{P}(\omega)$) となるから，Theorem 3.1 により $\mathfrak{a} = \aleph_1$ である．
□ (Corollary 3.2)

参考文献

[1] A. Dow and K.P. Hart, *Applications of another characterization of* $\beta\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, Topology and its Applications, 122, 1-2, 105–133 (2002)

[2] M. Foreman, M. Magidor, and S. Shelah, Martin's Maximum, saturated ideals and non-regular ultrafilters. Part I. AM **127** (1988), 1-47.

[3] S. Fuchino and S. Geschke, Remarks on a paper by Juhász and Kunen, preprint.

[4] S. Fuchino, S. Geschke and L. Soukup, *The weak Freese-Nation property of* $\mathcal{P}(\omega)$, Archive of Mathematical Logic 40, No.6 (2001), 425–435.

[5] S. Fuchino, S. Geschke, S. Shelah and L. Soukup, *On the weak Freese-Nation property of complete Boolean algebras*, Annals of Pure and Applied Logic 110, No.1-3 (2001), 89–105.

[6] S. Fuchino, S. Koppelberg and S. Shelah, *Partial orderings with the weak Freese-Nation property*, Annals of Pure and Applied Logic, 80 (1996).

[7] S. Fuchino and L. Soukup, *More set theory around the weak Freese-Nation property*, Fundamenta Mathematicae 154 (1997), 159–176.

[8] I. Juhász and K. Kunen, *The Power Set of* ω*, Elementary submodels and weakenings of CH*, Fundamenta Mathematicae 170 (2001), 257–265.